CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL

I. Définition :

Dans la suite, nous nous intéressons au mouvement d'un point matériel, càd son déplacement dans l'espace et dans le temps, ainsi nous aurons besoin de définir :

I. 1. Le point matériel :

C'est le système physique le plus réduit, il correspond géométriquement à un point.

I. 2. Repère :

Lorsque nous parlons des mouvements d'un point matériel, nous parlons de mouvement par rapport à quelque chose (comme les objets qui l'entourent). Pour décrire ces mouvements, il nous faut dire par rapport à quoi ils ont lieu, alors on doit définir un repère. On distingue le repère d'espace (par rapport à une position) au repère du temps (étude du mouvement en fonction du temps). L'association des deux repères s'appelle référentiel (ex : référentiel lié à la terre).

Les référentiels galiléens (les plus connus) sont ceux qui conservent le même repère temps (le temps est absolu), tandis que les repères d'espace se déplacent les uns par rapport aux autres d'une façon rectiligne et uniforme.

I. 3. Espace, temps et matière :

- la notion d'espace est liée aux différentes positions du point matériel.
- la notion du temps est liée à l'évolution du point matériel.
- à chaque point matériel est associé une quantité de matière, appelée masse.

L'ensemble des points matériels correspond à un corps solide.



I. 4. Coordonnées, degré de liberté et trajectoire :

- les coordonnées d'un point sont ses positions dans un espace quelconque (en général, on parle d'un trièdre direct orthonormé).

- les degrés de liberté sont les paramètres qui définissent le lieu du point matériel à un instant donné.

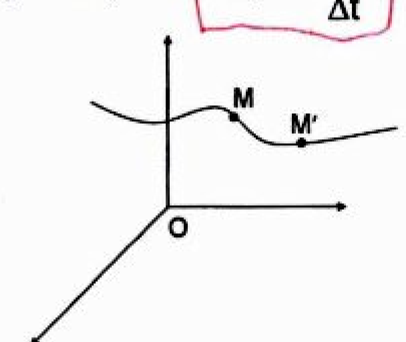
- la trajectoire est l'ensemble des point géométriques qu'occupe le point matériel en fonction du temps.

Connaissant cette trajectoire, on peut définir l'équation horaire du mouvement, càd comment évolue le point matériel avec le temps.

II. Vecteur vitesse :

II. 1. vitesse moyenne :

Connaissant la position du point matériel pour deux instants donnés, on calcule sa vitesse moyenne par : $\vec{V}_{moy} = \dfrac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$.



II. 2. vitesse instantanée :

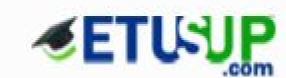
C'est la vitesse moyenne du point matériel pendant un temps très court ($\Delta t \to 0$), càd la vitesse à l'instant t : $\vec{V}(M) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$.

II. 3. vitesse en différentes coordonnées :

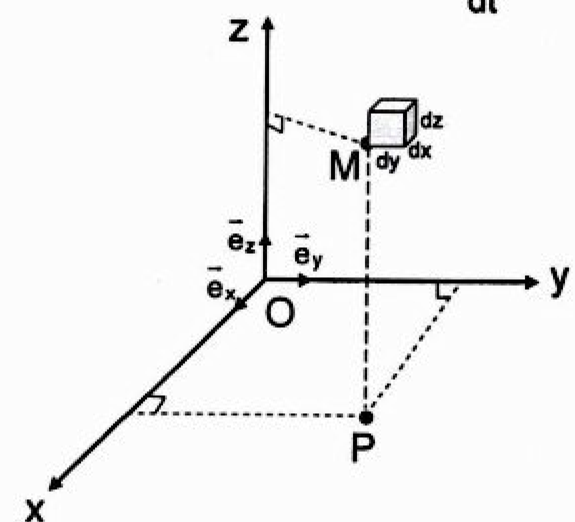
II. 3. 1. en coordonnées cartésiennes :

Dans le repère cartésien $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, le vecteur position s'écrit :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = (x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y) + z\,\vec{e}_z$, dont le déplacement élémentaire sera :



$d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z$, ainsi : $\vec{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y + \dot{z}\,\vec{e}_z$

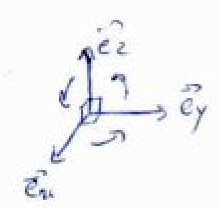


$\|\vec{V}\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

x : abscisse
y : ordonnée
z : côte

Remarque :

(x,y,z) est un trièdre direct de base orthonormée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:



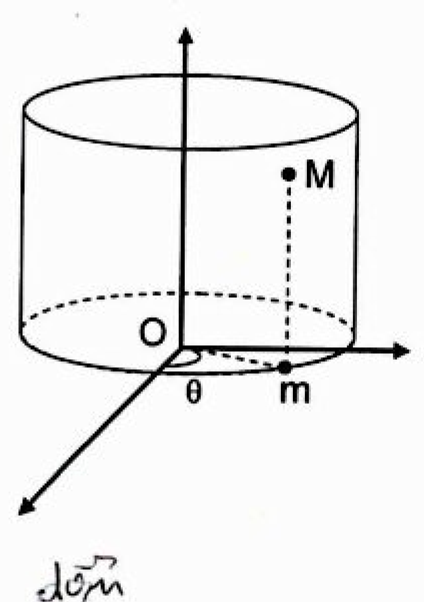
$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z;\ \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_x;\ \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y$

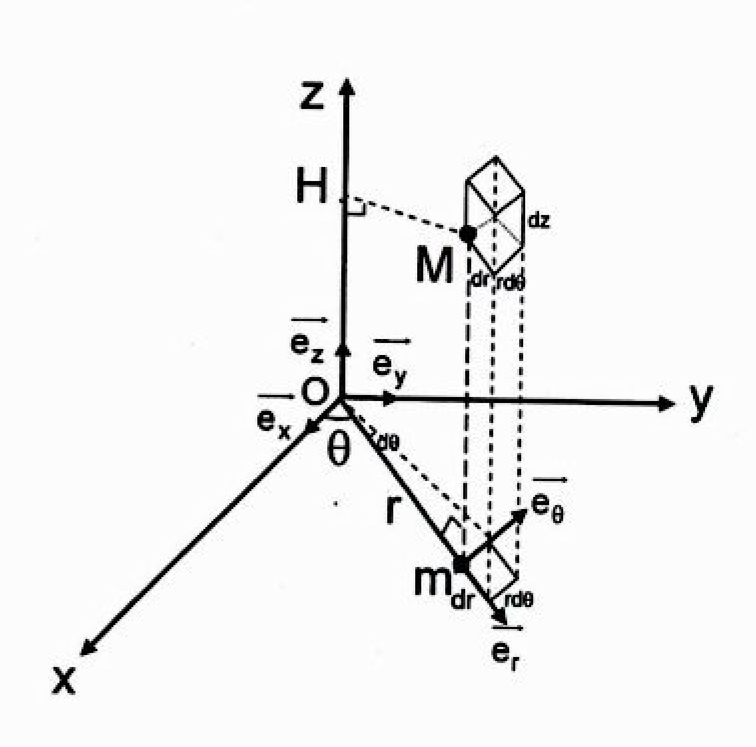
$\vec{e}_x.\vec{e}_y = \vec{e}_y.\vec{e}_z = \vec{e}_z.\vec{e}_x = 0$ et $\|\vec{e}_x\| = \|\vec{e}_y\| = \|\vec{e}_z\| = 1$

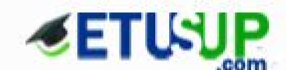
II. 3. 2. en coordonnées cylindriques :

Dans le cas d'un cylindre, l'utilisation des composantes cylindriques facilite beaucoup l'étude du mouvement, on définit ainsi le vecteur position par : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$.

Quand M varie, r, θ et z varient.







Le déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ est : $dr\,\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + dz\,\vec{e}_z$

Par suite, la vitesse du point M sera : $\vec{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z$

Remarques :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z \Rightarrow \vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{z}\,\vec{e}_z + z\frac{d\vec{e}_z}{dt}$$

- du fait que l'axe $\vec{e}_z$ est fixe : $\dfrac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{0}$

- et la dérivée d'un vecteur unitaire qui tourne autour d'un axe fixe z avec une vitesse angulaire ω est : $\dfrac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_r = \dot{\theta}\vec{k} \wedge \vec{e}_r = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$ et $\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k} = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r$

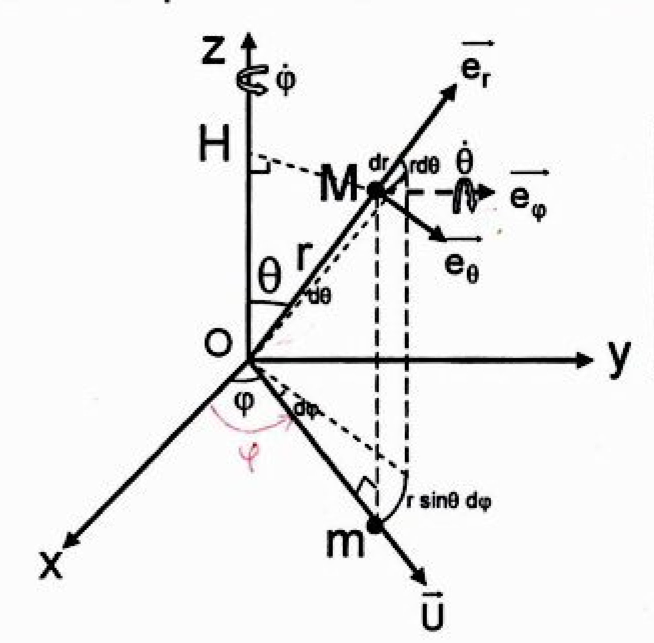
Ainsi : $\vec{V} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z$

Exercice : *Montrer à l'aide des composantes cartésiennes de* $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ que :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \omega\,\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\omega\,\vec{e}_r$$

II. 3. 3. en coordonnées sphériques :

Le vecteur position dans ce cas est : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$



$$\begin{cases} r = \|\overrightarrow{OM}\| \\ \text{colatitude } \theta = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM}) \text{ avec } 0 \le \theta \le \pi \\ \text{longitude } \varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) \text{ avec } 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$$\sin\theta = \frac{\overline{HM}}{r} = \frac{\overline{Om}}{r} \Rightarrow \rho = \overline{Om} = r\sin\theta$$

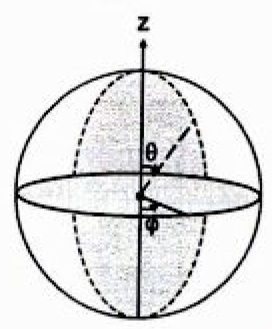
ETUSUP .com

D'après cette figure, le déplacement élémentaire de M suivant les trois axes est :

$d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta + rd\varphi\,\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$ $= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$

Ainsi la vitesse est : $\vec{V} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$

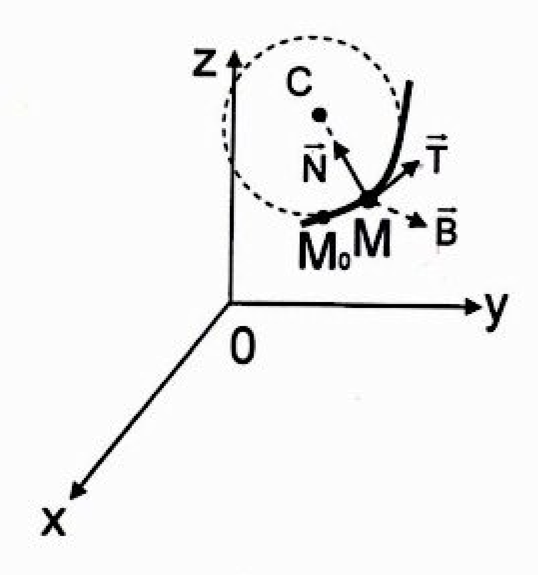
Ou bien, la vitesse peut être calculée à partir de la rotation que fait $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ par rapport au repère $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ avec la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z + \dot{\theta}\,\vec{e}_\varphi$, qui donnera pour la vitesse : $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z + \dot{\theta}\,\vec{e}_\varphi)\wedge\vec{e}_r$



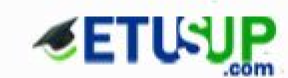
La projection de $\vec{e}_z$ dans $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ est : $\vec{e}_z = \cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta$

Ainsi $\vec{V} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r(\dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_r - \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\theta + \dot{\theta}\,\vec{e}_\varphi)\wedge\vec{e}_r = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$

II. 3. 4. en coordonnées intrinsèques (trièdre de Frenet) :



Sachant que S(t) est l'abscisse curviligne de longueur $\overset{\frown}{M_0M}$, la vitesse au point M sera définie par : $\vec{V} = \frac{dS}{dt}\vec{T}$



$\vec{T}$ est le vecteur tangent à la trajectoire au point M.

$\vec{N}$ est le vecteur normal à la trajectoire, dirigé vers le centre du cercle imaginaire.

$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$, tel que $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ forme un trièdre direct de Frenet.

III. Vecteur accélération :

III. 1. Définition :

Le vecteur accélération est défini comme la dérivée du vecteur vitesse instantanée par rapport au temps : $\vec{\gamma}(M) = \dfrac{d\vec{V}(M)}{dt} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$

III. 2. Composantes de l'accélération :

- **en coordonnées cartésiennes** :

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}.\vec{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2}.\vec{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2}.\vec{e}_z = \ddot{x}.\vec{e}_x + \ddot{y}.\vec{e}_y + \ddot{z}.\vec{e}_z$$ dont le module :

$$\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

- **en coordonnées cylindriques** :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \ddot{z}\,\vec{e}_z + \dot{z}\frac{d\vec{e}_z}{dt}$$

$$= \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}\dot{\theta}\vec{e}_r + \ddot{z}\vec{e}_z = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\,\vec{e}_z$$

Remarque : dans un plan (z=0) : $\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$

- **en coordonnées sphériques** :

$$\vec{\gamma} = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}$$

Rappelons que la vitesse angulaire avec laquelle tourne le point matériel M autour du repère $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ dans les deux sens est :

$$\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z + \dot{\theta}\,\vec{e}_\varphi = \dot{\varphi}(\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta) + \dot{\theta}\,\vec{e}_\varphi$$



ainsi : $\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\theta = \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi - \dot{\theta}\vec{e}_r$, $\dfrac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\varphi = -\dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\theta - \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_r$

$$\vec{\gamma} = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\left(\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta\right) + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\left(\dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi - \dot{\theta}\vec{e}_r\right) + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$
$$+ r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta\left(-\dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\theta - \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_r\right)$$

$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{e}_\theta + \left(2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta\right)\vec{e}_\varphi$$

- **<u>en coordonnées intrinsèques (trièdre de Frenet)</u>** :

$$\vec{V} = \frac{dS}{dt}\vec{T} \Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}\vec{T} + \frac{dS}{dt}\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}\vec{T} + \frac{dS}{dt}\frac{d\vec{T}}{dS}\frac{dS}{dt}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2S}{dt^2}\vec{T} + \left(\frac{dS}{dt}\right)^2 \frac{d\vec{T}}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dS}$$

Or $\dfrac{d\vec{T}}{d\alpha} = \vec{N}$ et $dS = \rho d\alpha$, dont ρ est le rayon de courbure de la trajectoire.

D'où $\vec{\gamma} = \dfrac{d^2S}{dt^2}\vec{T} + \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{dS}{dt}\right)^2\vec{N} = \dfrac{dV}{dt}\vec{T} + \dfrac{V^2}{\rho}\vec{N} = \gamma_T\,\vec{T} + \gamma_N\,\vec{N}$

γ_T est l'accélération tangentielle.

γ_N est l'accélération normale.

<u>Remarque</u> : $\vec{V} \wedge \vec{\gamma} = V\,\vec{T} \wedge \left(\dfrac{dV}{dt}\vec{T} + \dfrac{V^2}{\rho}\vec{N}\right) = \dfrac{V^3}{\rho}\vec{B} \Rightarrow \rho = \dfrac{V^3}{\left\|\vec{V} \wedge \vec{\gamma}\right\|}$

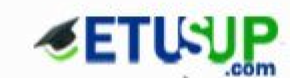
IV. Mouvements simples :

IV. 1. Mouvements rectilignes :

Le mouvement est dit rectiligne lorsque la trajectoire du point matériel est une droite : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x \Rightarrow \vec{V} = \dot{x}\,\vec{e}_x \Rightarrow \vec{\gamma} = \ddot{x}\,\vec{e}_x$

- si $V = \left\|\vec{V}\right\| = Cte$ (mouvement uniforme), on a : $\gamma = 0$ et $x = V_0 t + x_0$

V_0 : vitesse à l'instant initial, x_0 : point départ de M.



• si $\gamma = \|\vec{\gamma}\| = Cte$ (mouvement uniformément varié), on trouve :

$$V = \gamma_0 t + V_0 \text{ et } x = \frac{1}{2}\gamma_0 t^2 + V_0 t + x_0$$

Le mouvement est dit **accéléré** si V croit avec le temps

Le mouvement est dit **retardé** si V décroît avec le temps

Ou bien, à partir de : $\frac{d}{dt}\|\vec{V}\|^2 = 2\vec{V}.\vec{\gamma} \Rightarrow \begin{cases} \|\vec{V}\| \uparrow \Rightarrow \vec{V}.\vec{\gamma} > 0 \\ \|\vec{V}\| \downarrow \Rightarrow \vec{V}.\vec{\gamma} < 0 \end{cases}$

M $\vec{V}$ $\vec{\gamma}$

$\vec{\gamma}$ M $\vec{V}$

IV. 2. Mouvements circulaires :

Dans ce cas, la trajectoire est un cercle de rayon R constant, et le mouvement s'effectue dans un plan repéré par (O,x,y).

Le point M a pour composantes $\begin{cases} R\cos\theta \\ R\sin\theta \end{cases}$

Ou bien, on définit l'abscisse curviligne par : $S = M_0\overset{\frown}{M} = R\theta \Rightarrow dS = Rd\theta$

$$\Rightarrow \vec{V} = \frac{dS}{dt}\vec{e}_\theta = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = R\omega\vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = R\dot{\omega}\vec{e}_\theta + R\omega\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = R\dot{\omega}\vec{e}_\theta + R\omega\left(\omega\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta\right) = R\dot{\omega}\vec{e}_\theta - R\omega^2\vec{e}_r$$

D'où $\vec{\gamma} = R\dot{\omega}\vec{e}_t + R\omega^2\vec{e}_n = \gamma_t\vec{e}_t + \gamma_n\vec{e}_n$ avec $\vec{e}_t = \vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_n = -\vec{e}_r$

<u>**Remarque**</u> : si le mouvement est uniforme : $\omega = Cte \Rightarrow \dot{\omega} = 0$

$$\gamma_t = 0 \text{ et } \gamma_n = R\omega^2 = \frac{V^2}{R} = Cte$$

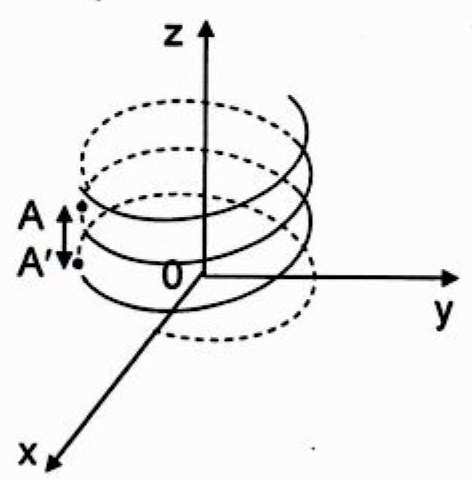
IV. 3. Mouvements hélicoïdaux :

Dans ce cas, le point matériel décrit une hélice circulaire de rayon R, situé dans un cylindre d'axe Oz.

Le point M a pour composantes dans le repère $\left(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$:



$$\overrightarrow{OM}\begin{cases}R\cos\theta\\ R\sin\theta\\ h\theta\end{cases} \Rightarrow \vec{V}(M)\begin{cases}-R\omega\sin\theta\\ R\omega\cos\theta\\ h\omega\end{cases} \Rightarrow \vec{\gamma}(M)\begin{cases}-R\dot{\omega}\sin\theta-R\omega^2\cos\theta\\ R\dot{\omega}\cos\theta-R\omega^2\sin\theta\\ h\dot{\omega}\end{cases}$$



exemples : - escaliers en colimaçon

- vis

à l'instant t=0 : $\overrightarrow{OM}\begin{cases}R\cos\omega t=R\\ R\sin\omega t=0\\ h\omega t=0\end{cases}$

$AA'=2\pi h$: le pas de l'hélice.

IV. 4. Mouvements à accélération centrale :

IV. 4. 1. Définition :

On appelle mouvement à accélération centrale un mouvement tel que, à chaque instant, l'accélération au point M passe par un point fixe O, due à une force passant par ce point fixe (force centrale). Ceci peut se traduire, sous forme d'équations, de la manière suivante : $\overrightarrow{OM}\wedge\vec{\gamma}=\vec{0}$.

Ce mouvement possède des propriétés remarquables que nous allons examiner :

- si on introduit le vecteur de la constante des aires : $\vec{C}=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{V}$, on montre que sa dérivée temporelle est nulle :

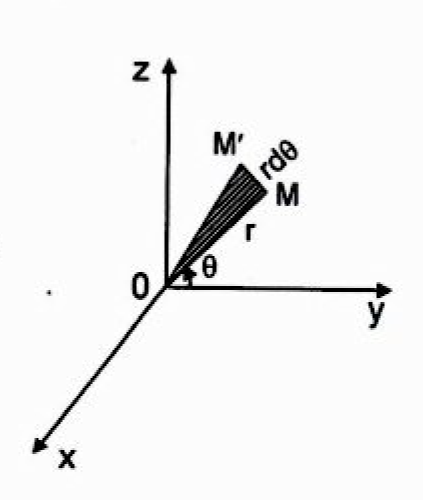
$$\frac{d\vec{C}}{dt}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\wedge\vec{V}+\overrightarrow{OM}\wedge\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{V}\wedge\vec{V}+\overrightarrow{OM}\wedge\vec{\gamma}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$$

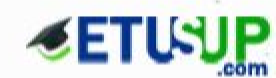
Son expression en coordonnées polaires est :

$$\vec{C}=r\vec{e}_r\wedge\left(\dot{r}\vec{e}_r\wedge r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right)=r^2\dot{\theta}\vec{e}_z\Rightarrow C=r^2\dot{\theta}$$

L'aire élémentaire balayée par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ est :

$$dA=\frac{r.rd\theta}{2}=\frac{1}{2}r^2d\theta \quad \text{(l'aire de la partie hachurée)}$$





Ce qui conduit à la «**vitesse aréolaire**» : $\frac{dA}{dt} = \frac{r^2\dot{\theta}}{2} = \frac{C}{2}$

$$\Rightarrow A = \int dA = \int \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} dt = \int \frac{1}{2} C dt = \frac{1}{2} Ct + A_0$$

Cette loi indique que l'aire balayée par $\overrightarrow{OM}$ est proportionnelle au temps : on balaye des aires égales pendant des intervalles de temps réguliers.

- Formules de Binet :

Cherchons le module de la vitesse $\|\vec{V}\|^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$ en fonction de Cte des aires :

* $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{C}{r^2} = \frac{-C}{d\theta}\left(-\frac{dr}{r^2}\right) = -C\frac{d(1/r)}{d\theta} = -C\frac{du}{d\theta}$, avec $u = \frac{1}{r}$

* $r\dot{\theta} = \frac{C}{r} = C.u$

On en déduit **la première** formule de Binet : $V^2 = C^2\left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right)$

De même pour l'accélération centrale : $\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} \Rightarrow \|\vec{\gamma}\| = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

* $\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr}{dt}\right)\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}\left(-C\frac{du}{d\theta}\right)Cu^2 = \left(-C\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)Cu^2 = -C^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$

* $r\dot{\theta}^2 = r\frac{C^2}{r^4} = C^2u^3$

D'où $\gamma = -C^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$, qui est **la seconde** formule de Binet

Remarque : La constante des aires n'est que le moment du vecteur vitesse passant par M par rapport au point O : $\mathcal{M}_O \vec{V}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}$ qui se conserve.

V. Changement de référentiel :

Les états de repos ou de mouvement d'un point matériel sont relatifs Une personne accroché à un camion peut se trouver au repos par rapport à une autre personne dans le même camion, ou se trouver en mouvement par rapport



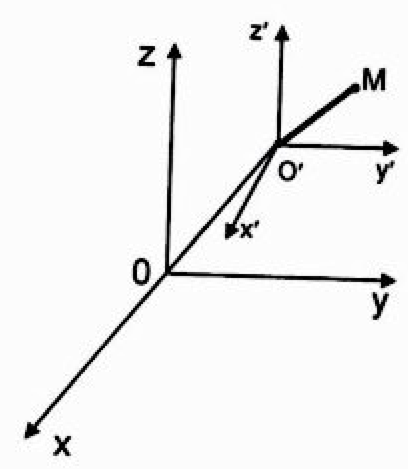
à une autre personne se trouvant sur le sol. Ainsi, on peut considérer que le point matériel est lié à un repère mobile R′ (le camion dans ce cas) par rapport au repère fixe (le sol).

V. 1. Changement de repère d'espace pour les vitesses :

Considérons un référentiel $\mathfrak{R}$ constitué du repère d'espace $R(0,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ et d'un repère temps donné, le référentiel $\mathfrak{R}'$ est constitué d'un repère d'espace $R'(0',\vec{e'}_x,\vec{e'}_y,\vec{e'}_z)$ en mouvement par rapport à R et ayant le même repère temps.

Le point matériel M pourra avoir, au même instant, les coordonnées (x,y,z) dans le repère fixe R et les coordonnées (x′,y′,z′) dans le repère mobile R′, tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

avec $\overrightarrow{OM}/R = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$, et $\overrightarrow{OM'}/R' = x'\,\vec{e'}_x + y'\,\vec{e'}_y + z'\,\vec{e'}_z$



Remarque : Pour un point matériel M en mouvement dans un repère R′, lui-même en mouvement par rapport à un repère fixe R, on peut définir :

- le mouvement **absolu**, qui est le mouvement de M dans R
- le mouvement **relatif**, celui de M dans R′
- le mouvement **d'entraînement**, est le mouvement de R′ par rapport à R
- le temps à une valeur absolue (**invariant** dans tous les repères).



Ainsi, nous définissons les vecteurs vitesses à l'instant t dans R et dans R'

par : $\vec{V}_R(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/R = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z = \vec{V}_a$

et $\vec{V}_{R'}(M) = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/R' = \dot{x}'\vec{e'}_x + \dot{y}'\vec{e'}_y + \dot{z}'\vec{e'}_z = \vec{V}_r$

$$\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}/R + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/R = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}/R + \dot{x}'\vec{e'}_x + \dot{y}'\vec{e'}_y + \dot{z}'\vec{e'}_z + x'\frac{d\vec{e'}_x}{dt} + y'\frac{d\vec{e'}_y}{dt} + z'\frac{d\vec{e'}_z}{dt}$$

$$\vec{V}_a = \underbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}/R + x'\frac{d\vec{e'}_x}{dt} + y'\frac{d\vec{e'}_y}{dt} + z'\frac{d\vec{e'}_z}{dt}\right)}_{\vec{V}_e} + \underbrace{\left(\dot{x}'\vec{e'}_x + \dot{y}'\vec{e'}_y + \dot{z}'\vec{e'}_z\right)}_{\vec{V}_r}$$

Or $\frac{d\vec{e'}_x}{dt} = \vec{\omega}_{(R'/R)} \wedge \vec{e'}_x$, $\frac{d\vec{e'}_y}{dt} = \vec{\omega}_{(R'/R)} \wedge \vec{e'}_y$, $\frac{d\vec{e'}_z}{dt} = \vec{\omega}_{(R'/R)} \wedge \vec{e'}_z$

D'où : $\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}/R + \vec{\omega}_{(R'/R)} \wedge \left(x'\vec{e'}_x + y'\vec{e'}_y + z'\vec{e'}_z\right) = \vec{V}_R(O') + \vec{\omega}_{(R'/R)} \wedge \overrightarrow{O'M}$

V. 2. Changement de repère d'espace pour les accélérations :

De même, on définit ici l'accélération absolue et relative par :

$$\vec{\gamma}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt}/R = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}/R = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$$

et $\vec{\gamma}_r = \frac{d\vec{V}_r}{dt}/R' = \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}/R' = \ddot{x}'\vec{e'}_x + \ddot{y}'\vec{e'}_y + \ddot{z}'\vec{e'}_z$

ou bien $\vec{\gamma}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}/R + \frac{d}{dt}\left(\dot{x}'\vec{e'}_x + \dot{y}'\vec{e'}_y + \dot{z}'\vec{e'}_z + x'\frac{d\vec{e'}_x}{dt} + y'\frac{d\vec{e'}_y}{dt} + z'\frac{d\vec{e'}_z}{dt}\right)$

$$= \vec{\gamma}_R(O') + \ddot{x}'\vec{e'}_x + \ddot{y}'\vec{e'}_y + \ddot{z}'\vec{e'}_z + 2\left(\dot{x}'\frac{d\vec{e'}_x}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{e'}_y}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{e'}_z}{dt}\right) + x'\frac{d^2\vec{e'}_x}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{e'}_y}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{e'}_z}{dt^2}$$

γ_r

$$\frac{d^2\vec{e'}_x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{e'}_x}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{e'}_x\right) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{e'}_x + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{e'}_x}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{e'}_x + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{e'}_x\right)$$





D'où : $\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_R(O') + \vec{\gamma}_r + 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$

En posant : $\vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$ et $\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}_R(O') + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$

On trouve que : $\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$

Cas particuliers :

- Si R′ a un mouvement de translation par rapport à R $\Rightarrow$ $\vec{\omega}_{(R'/R)} = \vec{0}$, d'où $\vec{V}_e = \vec{V}_R(O')$, $\vec{\gamma}_c = \vec{0}$ et $\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}_R(O')$

- Si R″ est en mouvement de rotation par rapport à R′ avec la vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega''}_{(R''/R')}$, et R′ est en mouvement de rotation par rapport à R avec la vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega'}_{(R'/R)}$, alors R″ tourne autour du repère R avec la vitesse angulaire : $\vec{\omega}_{(R''/R)} = \overrightarrow{\omega'}_{(R'/R)} + \overrightarrow{\omega''}_{(R''/R)}$





Programmation
Informatique
Travaux Pratiques
Algébre
Cours
Optique
Chimie
Corrigés
Mathématiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..